WKB method による Taylor-Goldstein 方程式の漸近解析

はまだあつし@ぶつりきこう

1999/10/29, Salby seminar

1. WKB 法とは？

線形化された波動方程式

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}; \boldsymbol{x}, t\right)\phi = 0$$

は, その解が水平方向と時間方向に関して単色波の重ね合わせで記述できれば

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + m^2\right)\phi = 0 \tag{1}$$

を解くことに帰着するであろう. もし媒質が時空間的に一様ならば, m は z に関係ない定数となって, その解は

$$\phi = Ae^{\pm imz} \tag{2}$$

である. 然しながら実際には, 現実大気を見ても明らかな様に, 鉛直方向に一様な基本場というのは稀である. 従って, 一般には m は z の函数となる. このとき基本場の鉛直方向への変化が十分小さいならば, 波全体の形の変化もゆっくりとしたものとなり, 方程式 (1) の解は 局所的には(2) と似た形になることが予想される.

Sturm-Liouville 型 2 階線形常微分方程式である 1 次元の波動方程式 (1) の近似解法の一つに WKB 法がある. この理論は元々Liouville(1837) と Green(1838) によって取り組まれ, 後に Rayleigh(1912) が波動伝播の問題を解くために物理学に導入した. これを Wentzel, Kramers, Brillouin(1926) が同時に発展させたので, その頭文字をとってこの名がある. その理論によれば, 一定振動数の波は, 均質でない媒質の中でも, 波長 λ が緩やかに変化する領域, 即ち $|\mathrm{grad}\lambda| \ll 1$ であるような領域では 局所的に 平面波 (quasi-plane wave) で近似され, 分散関係を満たす.

2. Taylor-Goldstein 方程式の WKB 近似解

2.1. Taylor-Goldstein 方程式

支配方程式を

- Boussinesq 流体
- 非回転, 非粘性
- 運動は鉛直 (x-z) 2 次元, 微小振幅; e.g., $u = \bar{u} + u'$
- 基本場は鉛直方向に変化; $N^2 = N^2(z), \quad \bar{u} = \bar{u}(z)$

という仮定の下で線形化し, 波動の鉛直速度として $w(z)e^{ik(x-c_xt)}$ という解を考えれば, $w(z) \in \mathbf{C}$ を決める式は

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + m^2(z)w = 0 \\ &m^2(z) = \frac{N^2}{(c_x - \bar{u})^2} - k^2 + \frac{\bar{u}_{zz}}{c_x - \bar{u}} \end{aligned} \tag{3}$$

となる (Salby, sec.14.3.2). この式は Taylor-Goldstein 方程式と呼ばれ, 安定成層した流体中の基本流に乗った波動の安定性を議論するのに用いられる. より一般的には, m^2 は Scorer 数 l^2 を用いて $m^2 = l^2 - k^2$ で表される.

2.2. WKB method による漸近解

まず, 微小なパラメタ ϵ を導入し, 座標を引き延ばす.

$$\zeta \equiv \epsilon z, \quad 0 < \epsilon \ll 1$$

すると方程式 (3) は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\epsilon^2} m^2 w = 0 \tag{4}$$

となる. 以下 ζ に関する微分を prime で表す.

$$w = e^{i\psi(\zeta)/\epsilon}$$

と置く. これを方程式 (4) に代入すると,

$$\begin{aligned} (4)\ \text{左辺} &= (e^{i\psi/\epsilon})'' + \frac{1}{\epsilon^2} m^2 e^{i\psi/\epsilon} \\ &= \left(\frac{i}{\epsilon}\psi' e^{i\psi/\epsilon}\right)' + \frac{1}{\epsilon^2} m^2 e^{i\psi/\epsilon} \\ &= \frac{i}{\epsilon}\psi'' e^{i\psi/\epsilon} - \frac{1}{\epsilon^2}\psi'^2 e^{i\psi/\epsilon} + \frac{1}{\epsilon^2} m^2 e^{i\psi/\epsilon} \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} e^{i\psi/\epsilon}\left(i\epsilon\psi'' - \psi'^2 + m^2\right) \end{aligned}$$

故,

$$i\epsilon\psi'' - \psi'^2 + m^2 = 0 \tag{5}$$

と書かれて, ψ に関する微分方程式が得られる. この微分方程式は, 我々の出発点であった方程式 (4) と <u>厳密に</u> 同値である.

WKB<u>近似</u> による漸近解を求めるため, ψ を ϵ の冪級数

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \psi_n \tag{6}$$

に展開し, この展開を (5) に入れる.

$$i\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \psi_n'' + \left(\sum_n \epsilon^n \psi_n'\right)^2 + m^2 = 0 \tag{7}$$

位数 ϵ について整理すると,

$$
\begin{aligned}
O(\epsilon^0): &\qquad \psi_0'^2 - m^2 = 0 \\
O(\epsilon^1): &\qquad i\psi_0'' - 2\psi_0'\psi_1' = 0 \\
O(\epsilon^2): &\qquad i\psi_1'' - (\psi_1'^2 + 2\psi_0'\psi_2') = 0 \\
\vdots \quad &\qquad \vdots
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$O(\epsilon^0)$ の式は直ちに積分できて,

$$
\psi_0 = \pm\int^{\zeta} m\,d\zeta \tag{9}
$$

を得る. これを $O(\epsilon^1)$ の式に適用して,

$$
\begin{aligned}
\psi_1' &= \frac{i}{2}\frac{\psi_0''}{\psi_0'} \\
\psi_1 &= \frac{i}{2}\ln\psi_0'
\end{aligned}
\tag{10}
$$

すると位数 1 の項までの近似解は

$$
\begin{aligned}
w(\zeta) &\simeq \exp\left[\frac{i}{\epsilon}(\psi_0 + \epsilon\psi_1)\right] \\
&= \exp\left[\frac{i}{\epsilon}\left(\psi_0 + \epsilon\frac{i}{2}\ln\psi_0'\right)\right] \\
&= \phi_0'^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{i}{\epsilon}\psi_0\right) \\
&= m^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\pm i\int^{\zeta}\frac{m}{\epsilon}\,d\zeta\right)
\end{aligned}
$$

即ち,

$$
w(z) \simeq \frac{1}{\sqrt{m}}\exp\left(\pm i\int^{z} m\,dz\right) \tag{11}
$$

と求められる. この解は, m^2 の符号により 2 種類の形をとる.

a. $\mathbf{m^2 > 0}$ の場合

このとき $m \in \mathbf{R}$ で, WKB 解は波動解

$$
w(z) = \frac{1}{\sqrt{|m|}}\exp\left(\pm i\int^{z} m\,dz\right) \tag{12}
$$

の線形結合として求められる.

b. $\mathbf{m^2 < 0}$ の場合

このとき $m \in i\mathbf{R}$ であるから, この場合の WKB 解は実の指数函数

$$
w(z) = \frac{1}{\sqrt{|m|}}\exp\left(\pm\int^{z} \mathrm{Re}(m)\,dz\right) \tag{13}
$$

の線形結合として求められる.

3. WKB 近似の成立条件

ここでは, ψ の ϵ の冪による展開 (6) は一般には収束しないが漸近展開になっていることを示す. WKB 近似が成立しているかを判定するには, 展開 (6) の第 3 項 $\epsilon\psi_2$ の大きさを見積ればよい. $\epsilon\psi_2 \ll 1$ ならば, 第 3 項以下は無視できる.

冪級数展開 (6) により $O(\epsilon^2)$ として得られた式 (8) から,

$$\begin{aligned}
\psi_2' &= \frac{1}{2\psi_0'}\left(i\psi_1'' - \psi_1'^2\right) \\
&= \frac{1}{2\psi_0'}\left[i\left(\frac{i}{2}\frac{\psi_0''}{\psi_0'}\right)' - \left(\frac{i}{2}\frac{\psi_0''}{\psi_0'}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2\psi_0'}\left(-\frac{1}{2}\frac{\psi_0'''\psi_0' - \psi_0''^2}{\psi_0'^2} + \frac{1}{4}\frac{\psi_0''^2}{\psi_0'^2}\right) \\
&= \frac{1}{\psi_0'}\left(-\frac{1}{4}\frac{\psi_0'''}{\psi_0'} + \frac{3}{8}\frac{\psi_0''^2}{\psi_0'^2}\right) \qquad (14)
\end{aligned}$$

ここで波長の $1/2\pi$ を

$$\lambdabar = \frac{\epsilon}{\sqrt{|m^2|}} \qquad (15)$$

により定義する. すると

$$\begin{aligned}
\psi_0' &= \pm\frac{\epsilon}{\lambdabar} \\
\psi_0'' &= \mp\epsilon\frac{\lambdabar'}{\lambdabar^2} \\
\psi_0''' &= \mp\epsilon\frac{\lambdabar''\lambdabar^2 - 2\lambdabar'^2\lambdabar}{\lambdabar^4} = \mp\epsilon\frac{\lambdabar''\lambdabar - 2\lambdabar'^2}{\lambdabar^3}
\end{aligned}$$

であって, これを ψ_2 に関する微分方程式 (14) に代入すれば,

$$\begin{aligned}
\psi_2' &= \pm\frac{\lambdabar}{\epsilon}\left[-\frac{1}{4}\left(\pm\frac{\lambdabar}{\epsilon}\right)\left(\mp\epsilon\frac{\lambdabar''\lambdabar - 2\lambdabar'^2}{\lambdabar^3}\right) + \frac{3}{8}\left(\pm\frac{\lambdabar}{\epsilon}\right)^2\left(\mp\epsilon\frac{\lambdabar'}{\lambdabar^2}\right)^2\right] \\
&= \pm\frac{\lambdabar}{\epsilon}\left[\frac{1}{4}\frac{\lambdabar''\lambdabar - 2\lambdabar'^2}{\lambdabar^2} + \frac{3}{8}\frac{\lambdabar'^2}{\lambdabar^2}\right] \\
&= \pm\frac{1}{\epsilon}\left[\frac{1}{4}\lambdabar'' - \frac{1}{8}\frac{\lambdabar'^2}{\lambdabar^2}\right]
\end{aligned} \qquad (16)$$

故,

$$\begin{aligned}
\epsilon\psi_2 &= \pm\int\left(\frac{1}{4}\lambdabar'' - \frac{1}{8}\frac{\lambdabar'^2}{\lambdabar^2}\right)d\zeta \\
&= \pm\left(\frac{1}{4}\lambdabar' - \frac{1}{8}\int\frac{\lambdabar'^2}{\lambdabar^2}\,d\zeta\right)
\end{aligned}$$

を得る. 従って,

$$|\lambdabar'| = |\mathrm{grad}\lambdabar| \ll 1 \qquad (17)$$

ならば, 条件 $\epsilon\psi_2 \ll 1$ が確かに満たされる.

$|\mathrm{grad}\lambda| \ll 1$ であるというのは, 波長が緩やかに変化するということを示している. 即ち, 一定振動数の波は均質でない媒質の中でも, 波長 λ が緩やかに変化するような領域内では, 局所的に平面波で近似することが出来るのである.

4. 限界点における解の接続

WKB 近似が利用されるときは, $m = 0$ となるような点の近くを除けば, 大抵の場合条件 (17) が満たされる. 数学的に見れば, WKB 近似は方程式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \frac{w}{\lambda^2} = 0$$

を方程式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\left(\sqrt{\lambda}\right)''}{\sqrt{\lambda}} \right) w = 0 \tag{18}$$

或いは (15) を代入して,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + m^2 \left(1 + R(z)\right) w = 0, \\ &R(z) = \frac{1}{2m^3}\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} - \frac{3}{4m^4}\left(\frac{\partial m}{\partial z}\right)^2 \end{aligned}$$

に置き換えるものである (Salby 1996, (14.42)). 解 (12) (13) は確かに方程式 (18) の一般解となっている. この微分方程式において,$\lambda = \infty$ 即ち $m = 0$ となる各点 (限界点) は第 2 項の係数の 2 位の極となっていて, 方程式は確定特異点を持つ. これらの点の近くにおいては, 方程式 (18) は正しい近似を与えていない. それ故, 完全な解を得るためには, 限界点の周りの適当な大きさの領域で元の方程式を解き, WKB 近似が成り立つ隣接領域での解 (12) (13) に, その解を接続しなければならない.

方程式 (3) において, m^2 を特異点 $z = z_c$ の周りで Taylor 展開する.

$$\begin{aligned} m^2(z) &= m^2(z_c) + \left.\frac{d(m^2)}{dz}\right|_{z=z_c}(z - z_c) + O\left((z - z_c)^2\right) \\ &= 0 + C(z - z_c) + O\left((z - z_c)^2\right) \end{aligned}$$

m^2 を $(z - z_c)$ の 1 次の項まででで近似することにし, 方程式 (3) に代入すると, 近似方程式

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + C(z - z_c)w = 0$$

を得る. ここで $\eta = C^{\frac{1}{2}}(z - z_c)$ と変数変換すれば

$$\frac{d^2 w}{d\eta^2} + \eta w = 0 \tag{19}$$

これは変形された Bessel の微分方程式, 所謂 Airy の微分方程式であって, その解は 1/3 次円柱函数を用いて表される Airy 函数である.

$$w(\eta) \propto \eta^{\frac{1}{2}} Z_{\pm\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\eta^{\frac{3}{2}}\right) \equiv \mathrm{Ai}(\eta)$$

特異点 $z = z_c$ の近傍では $\eta \sim z - z_c$, $Z_\nu(x) \sim x^\nu$ であるから, w は有限の値をとり, 特異性は除去されている.

ここで得られた近似解を WKB 近似解が有効な領域まで延長し接続することにより, 任意定数が決定される.

References

Gill, 1982: Atmosphere-Ocean Dynamics sec.8.12, Academic Press, 662pp.

Hoskins, B.J., and T. Ambrizzi, 1993: Rossby wave propagation on a realistic longitudinally varying flow. *J. Atmos. Sci.*, **50,** 1-6.61-1671.

林 祥介, 他, 1996: 地球連続体力学 第 2 章, 岩波書店, 319pp.

メシア: 量子力学 1 第 6 章, 東京図書

Salby, M. L., 1996: Fundamentals of Atmospheric Physics sec.14.3.3, Academic Press, 627pp.

寺沢 寛一 編, 1960: 自然科学者のための数学概論 応用編 第 2 章, 岩波書店, 714pp.